明治大学科学技術研究所紀要
31(1)：1－6，1992

Mem. Inst. Sci. Tech. Meiji Univ.
31(1)：1－6，1992

不均一導波管の一解析法

岡　栄一

An Approach to Nonuniform Waveguides

EIICHI OKA

School of Science and Technology. Meiji University 1-1-1, Higashimita, Tama-ku, 214

Received September 29, 1992; Accepted Nobember, 4, 1992

Synopsis: This work deals with the analysis of a nonuniform waveguide which consists of tapered rectangular waveguides. Together with the method of separating variable, a numerical technique is used for obtaining solution to the scalar wave equation. Results of the analysis satisfy the law of conservation of energy between the input and the output terminals.

1. まえがき

テーパ導波管あるいはくびれのある導波管のような軸方向に太さが変化している不均一導波管の解析は，マックスウエルの方程式から導かれる波動方程式が厳密には変数分離できないため厄介な問題である。このような問題に対する解析法としては，導波管断面の軸方向に対する変化が緩やかであるとして波動方程式を近似的に変数分離し，軸方向の微分方程式をWKB法により解く方法[1]と，マックスウエルの方程式の代わりに伝送方程式を数値計算によって解く方法[2],[3]が知られている。前者はWKB解を求めることが必要となるが，導波管の形状が特定の場合を除いて解を求めることが困難であり，ある程度以上精度を上げることはできない。また後者は，未定係数を決定するマトリックス計算を必要とする。

本論文では，これらのことを改善して，より簡単に，かつ高い精度の解を得るために，近似的に変数分離を行ない，分離された微分方程式の内，軸方向の微分方程式は波動の進行方向とは逆に導波管の出力側から数値計算技法を用いて解く方法（逆行法）を試みる。

2．問題の設定と解析手法

図1に示すように，高さは一定で，幅だけが管軸方向に直線的にくびれた不均一矩形導波管を考える。TEモードのみを取り扱うこととすると，マックスウエルの方程式から得られる管軸方向の磁界成分が満たす波動方程式は

$$\nabla^2 H_z + k_0{}^2 H_z = 0 \tag{1}$$

となる。ここで，∇^2は直角座標系のラプラシアン，k_0は自由空間の伝搬定数である。

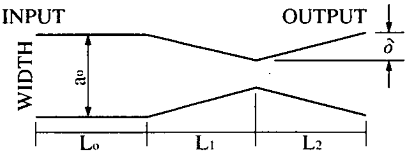

図1　不均一導波管の構造

このような導波管では，管軸方向に伝搬定数が変化することから，式(1)を厳密に変数分離することはできない。そこで，文献(1)の考え方に従い，軸方向に対する導波管断面の変化は緩やかであると仮定して，導波管を軸方向の微小区間に分割する。そうすることにより，各微小区間内では直線導波管と見なせるので，

$$H_z = X\ (x)\ \ Y\ (y)\ \ Z\ (z) \tag{2}$$

と置いて変数分離を行う。ただし，$X\ (x)$ および$Y\ (y)$ は各微小区間におけるxおよびy方向のモード関数，また$Z\ (z)$ の満たすべき常微分方程式は

$$Z''\ (z) + \beta^2 Z\ (z) = 0 \tag{3}$$

である。ここで，βは各微小区間におけるz方向の伝搬定数，プライムはzによる微分を表わす。次に，微分小区間を零に近ずけるとβはzの連続関数となるので，改めてzの全領域に対して式(3)と同形の式を解くことにする。文献(1)では$Z\ (z)$ としてWKB解が用いられているが，本論文では文献(2)，(3)でも用いられているルンゲ・クッタ法による数値解を用いることにする。

図1の導波管で，入力側に進行波を与えると，これに対する反射波が入力側に生じ，また出力側には一様振幅の進行波（透過波）が現われるはずである。周知のように，微分方程式を数値的に解くと特解が得られ，また初期値さえ与えられれば任意の位置から解を求めることが可能であり[4]，各領域（L_0，L_1およびL_2）の境界面における境界条件も自動的に満足される。

入力側から解く場合，進行波と反射波が与えられれば，出力側までの解を一度に求められるが，反射波の振幅は未知数であるからこれは不可能である。もし，この方向から解くので

あれば，文献(2), (3)のように，各領域に対し独立解を仮定し，境界条件を満足するように未定系数を決定しなければならない。しかも，遮断領域の解つまり指数関数的に減少する解をルンゲ・クッタ法のような陽解法を用いて進行方向に求めていくと，しばしば解の不安定性*に遭遇し，解析不能に陥ることが知られており[5]，2階の微分方程式を1階連立微分方程式に変換して解く場合，このことは特に顕著である。そこで本論文では，出力側から入力側に向かって解いて行く方法（逆行法と呼ぶことにする）を採用する。出力側に一様振幅の進行波を仮定すると，初期値としては式(3)の一様振幅を与える解，つまりβを一定とした場合の解とその微分値を与え，zを負の方向へ解いていけば，一度に入力側まで解くことができる。つまり，未定係数を定めるためのマトリックス計算は不要であり，また，解が不安定となる心配もなく，長い区間に対しても解析可能である。このようにして得られた解は出力側に一様振幅の透過波が現われるという必要条件を満たした解である。

以上の方法に従って式(3)を解けば，横方向の電界は次式から求められる。

$$E_x = -\frac{j\omega\mu_0}{k_0{}^2-\beta^2}\, Z(z)X(x)\,\frac{\partial Y(y)}{\partial y} \quad (4)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu_0}{k_0{}^2-\beta^2}\, Z(z)Y(y)\,\frac{\partial X(x)}{\partial x} \quad (5)$$

3. 計算結果

図2は，寸法が，$L_0=L_1=L_2=50$mm，$a_0=20$mm，$\delta=2.5$mmの導波管を用い，TE_{10}モードを伝送した場合の導波管中心軸上の電界Eyの変化を示したものである。周波数は9.2GHzおよび9.7GHzとし，図中の矢印で示した部分は9.2GHzと9.7GHzにおける遮断領域であり，電界強度はL_0部分の平均値で規格化した絶対値で示してある。

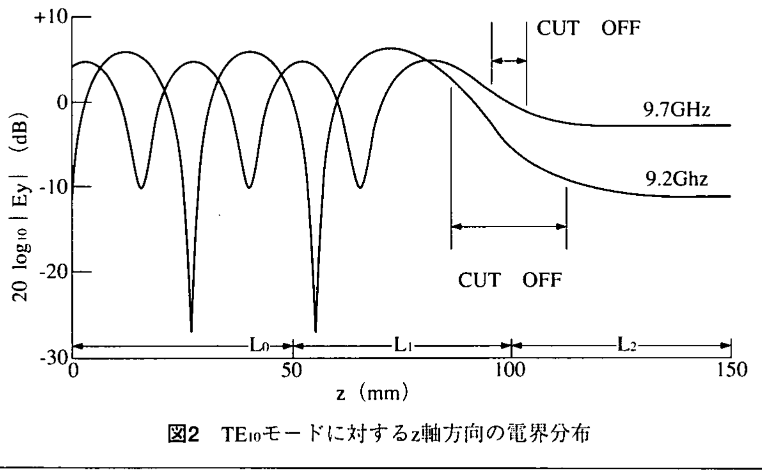

図2 TE_{10}モードに対するz軸方向の電界分布

* これは“まぼろしの解”とも呼ばれており，Milne法などで現われるいわゆる“数値的不安定性”とは異なる。

図をみると，直線導波管部分（L_0の部分）では定在波が生じ，テーパ部分の通過域ではその定在波がやや大きくなり，遮断領域ではその伝送方向に対して一様に減衰し，さらに，通過域に入ると振幅はほぼ一定となっている。また，出力端の値は伝送損失（透過係数）の大きさを与えており，入力側の定在波比から求めた反射損（反射係数）との間にエネルギー保存則がかなり良い精度で成立していることが分かる。

図 3 は，$L_0=L_1=L_2=50$mm，$a_0=20$mmとし，周波数に対する伝送損失をくびれの深さδをパラメーターとして示したものである。これを見ると，十分遮断領域に入ったところでは，損失(dB値)が周波数に対して直線的に変化し，その勾配はδが小さいほど僅かずつ急であることが分かる。

図 4 は，図 3 の場合と同じパラメーターを用い，周波数に対する反射損を入力側直線導波管部分の定在波から求めて示したものである。図から，十分通過域に入ったところで，反射損（dB値）は周波数に対してほぼ直線的に減少し，一旦減少率が低下した後，再び減少率が増加して直線的に減少することが分かる。また，図 3 と図 4 は，伝送損失が十数dB以下となる周波数領域では，反射損と伝送損失との間にエネルギー保存則が良い精度で成立していることを示している。

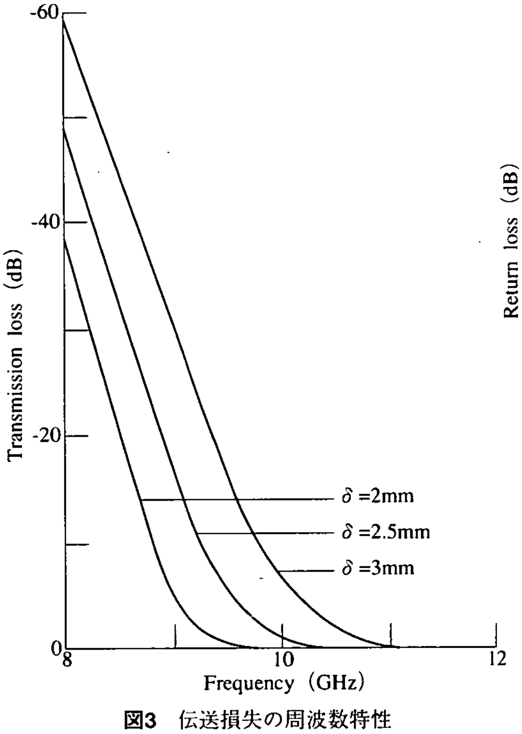

図3　伝送損失の周波数特性

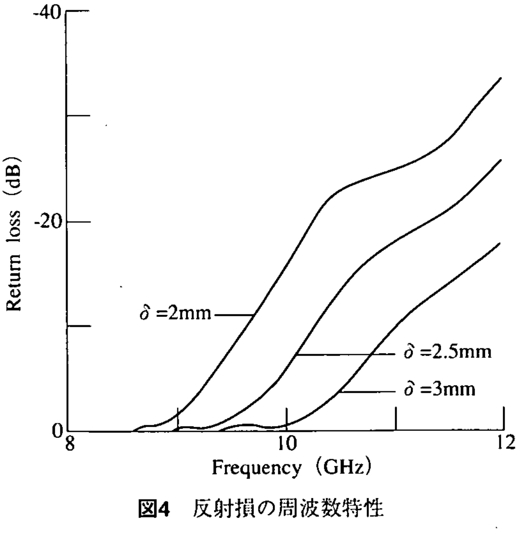

図4　反射損の周波数特性

4. ま と め

本文論では，導波管の幅が一部分だけ狭くなっている不均一導波管の伝送特性を，波動方程式を近似的に変数分離し，軸方向の微分方式はルンゲ・クッタ法により出力側から逆方向に解く逆行法を用いて求めた。

基本モードに対する結果から，伝送損失が非常に大きい場合を除いて，反射損と伝送損失の間にエネルギー保存則が良い精度で成立することが確認できた。

本解析法は，TE_{10}モード以外のモードに対しても，またくびれが曲線状の場合にもそのまま適用可能であり汎用性が高いこと，また出力側から入力側に向かってただ一度だけルンゲ・クッタ法を適用すればよく，取り扱いが極めて簡便であること，を特徴としている。ただし，導波管の一部に膨らんだ部分があって多重波が出力側にも現われる場合は，誤差を生じることが予想される。実測値との比較を含めて，このことは今後の課題としたい。近年，光回路素子の研究が盛んに行なわれており，これに関連して不均一導波路の解析も興味ある課題であり，今後この方面に本解析法の適用を検討していく予定である。

文 献

(1) 森田 清：“電磁波概論”，pp. 159－163，金原出版 (1961).

(2) 白崎，石原：“直線テーパ導波管形カットオフフィルタの特性”，信学論(B)，**J69－B**，7，pp，715－721 (1986-7).

(3) 石原，須賀，飯口：“テーパ導波管が多段に接続された回路の解析法”，信学論(C－I)，**J74－C－I**，1，pp. 14－20 (1991-1).

(4) 岡 栄一：“不均一大気内における電波伝搬のモード理論に対する数値解析法”，信学技報，**A・P82**－113 (1982－12).

(5) 一松 信：微分方程式と解法”，p. 149，教育出版 (1976).